▶ Teselling the space, background and a new experiment

TESELANDO EL ESPACIO,

ANTECEDENTES Y UN NUEVO EXPERIMENTO

Por: Guillermo Romero-Meléndez · Alejandra Rivera Gutiérrez · María del Pilar García de la Parra

Romero-Meléndez G., Rivera Gutiérrez A. y García de la Parra M. (2018). Teselando el espacio, antecedentes y un nuevo experimento. *Entorno UDLAP, 7.* **Recibido:** 25 de mayo de 2018 **Aceptado:** 10 de agosto de 2018

RESUMEN

Se presenta un experimento que consiste en teselar el espacio tridimensional utilizando cuatro octaedros irregulares. Se incluye una introducción a los conceptos relacionados con las teselaciones: simetrías, grupos y orbificies, así como los antecedentes del presente trabajo.

PALABRAS CLAVE

Teselación · Simetrías · Grupo · Orbificie

ABSTRACT

An experiment consisting of tessellating three-dimensional space using four irregular octahedra is presented. An introduction to the concepts related to the tessellations is included: symmetries, groups and orbifolds, as well as the antecedents of the present work.

KEYWORDS

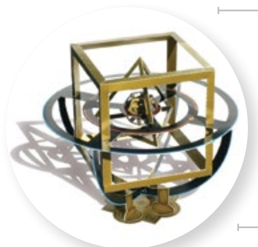
Tessellation · Symmetries · Group · Orbifold

INTRODUCCIÓN

Las teselaciones son figuras que llenan el plano o el espacio, y fueron realizadas inicialmente por los artistas del islam en el primer milenio de nuestra era. Para lograrlo utilizaron figuras geométricas debido a las prohibiciones religiosas de usar otros motivos al adornar sus construcciones. Ejemplos de ellas las tenemos en La Alhambra en Granada, España; en Al Azrak, el Palacio Azul, en Irán, y en el Palacio Rosa en la India (Hattstein y Delius, 2004; Zahai, 1998).

LAS TESELACIONES SON FIGURAS QUE LLENAN EL PLANO O EL ESPACIO, ESTAS FIGURAS FUERON INICIADAS PRINCIPALMENTE POR LOS ARTISTAS DEL ISLAM

Al iniciar este proyecto los artistas islámicos nos estaban conduciendo a encontrar una nueva forma de la materia: los cuasicristales, los cuales tienen simetrías que antes se consideraban «prohibidas», como la pentagonal, y que tienen gran dureza y alta resistencia al calor, además de asemejarse a proyecciones de cristales que «viven» en dimensiones mayores a la tercera (Romero-Meléndez y García de la Parra, 2017). Las teselaciones del plano fueron trabajadas por personajes como: Alberto Durero (1471-1528), Johannes Kepler (1571-1630), Maurits Escher (1898-1972) y Roger Penrose (1931-) (Križek, Solc y Solcová, 2012). Durero y Kepler utilizaron pentágonos, entre otras figuras, en sus diseños que intentaban llenar el plano, y es Kepler quien clasificó todas las formas de llenar el plano con figuras geométricas regulares convexas.



KEPLER PROPUSO UN MODELO DEL SISTEMA SOLAR EN DONDE EL MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS ESTUVIERA ENMARCADO POR SÓLIDOS PLATÓNICOS ANIDADOS, EN SU OBRA *MISTERIO DEL COSMOS* (HAWKING, 2010).

ESCHER DOMINÓ CON GRAN MAESTRÍA EL ARTE DE LLENAR EL ESPACIO CON FIGURAS QUE TIENEN «SENTIDO», UTILIZA FIGURAS GEOMÉTRICAS, ANIMALES E INCLUSO PERSONAS ENTRE OTROS MOTIVOS.

Kepler propuso un modelo del sistema solar en donde el movimiento de los planetas estuviera enmarcado por sólidos platónicos anidados, en su obra *Misterio del cosmos* (Hawking, 2010). Escher dominó con gran maestría el arte de llenar el espacio con figuras que tienen «sentido», utilizando figuras geométricas, animales e incluso personas, entre otros motivos. Sus diseños pueden tener dos o tres dimensiones, e incluso pueden combinar ambas. También exploró la creación de figuras que no pueden existir en nuestro universo, porque violarían algún principio físico, como el principio de conservación de la energía, o algunas figuras que no pueden existir en ningún espacio en el que se tenga la noción matemática de ángulo y distancia, como el triángulo de Penrose o «tribar» que redescubrió Penrose cuando era niño (se atribuye originalmente al artista Oscar Reutersvärd [1915-2002]). Escher se dejó inspirar conscientemente por la matemática y en alguna de sus obras aparecen –en forma artística– construcciones matemáticas, como por ejemplo el plano hiperbólico, así como la representación gráfica de paradojas matemáticas pertenecientes a la teoría de los conjuntos (Ernst, 1990; Coxeter, 1986). Roger Penrose, además de la teselación que lleva su nombre, realizó importantes trabajos en la teoría matemática de las matrices, y en astrofísica, en colaboración con Stephen Hawking. Recientemente ha mantenido discusiones polémicas con expertos de las ciencias de la computación opinando que, para darle una conciencia a las computadoras, se debe mejorar la mecánica cuántica actual (Penrose, 1999, 2008).

Tradicionalmente las figuras que se utilizan en las teselaciones tienen como elementos importantes a sus simetrías, entendiéndolas como movimientos o acciones que no alteran las figuras. Éstas se convirtieron en herramientas indispensables para las ciencias, como por ejemplo en la física de partículas (algunas partículas fueron «detectadas» teóricamente al calcular matemáticamente simetrías). El estudio de las simetrías llevó a crear la estructura matemática de «Grupo», el cual es un conjunto con una operación que posee ciertas propiedades que nos recuerdan las de la suma en los números reales: si sumamos dos números reales obtenemos un número real, se cumple la propiedad asociativa, existe un elemento neutro (en la suma es el cero) que no afecta a los otros números a operar con ellos, todo elemento del grupo tiene su inverso: dado un elemento *a* de grupo, existe un elemento *-a* que al operar con *a* obtenemos el elemento neutro (a+(-a) = 0 en la suma) (Hall, 1979).

La teoría de los grupos fue imaginada por primera vez por los matemáticos: Evaristo Galois (1811-1832) y Niels Henrik Abel (1802-1829) a inicios del siglo XIX y ocupa un lugar central en la matemática, la física y la química (Livio, 2005). Los conceptos de simetría, teselaciones y grupos se funden en el concepto de «orbificie» que significa una superficie teselada, a la cual se le calculan sus simetrías (Montesinos, 2010). La teselación del espacio inicia con un error de Aristóteles, de creer que se podía llenar el espacio con tetraedros regulares, siguiendo con un diseño formado por un octaedro y dos tetraedros que sí teselan el espacio y dos figuras más que también lo logran: el octaedro truncado y el dodecaedro rómbico (Alcina, 2011).

Este trabajo presenta una manera de lograr la teselación del espacio, consistente en utilizar una figura formada por cuatro octaedros irregulares que, al repetirla, llena el espacio. Para el diseño computacional de las figuras, se utilizó el programa Wolfram Mathematica. Este trabajo se basa en la tesina de la segunda autora, realizada con la supervisión del primer autor, presentada para obtener el grado de Licenciatura en Actuaría de la Universidad de las Américas Puebla (Rivera Gutiérrez, 2016). Se tiene como antecedente del presente trabajo los diseños tridimensionales realizados por la tercera autora y el primer autor. En ese trabajo se diseñó una figura de cinco dimensiones cuya proyección en tres dimensiones se muestra en la figura 7. Al proyectar ésta, a su vez, en dos dimensiones se obtiene una teselación del plano que utiliza los rombos de Penrose. Al hacer un estudio de difracción a las figuras obtenidas se obtuvieron patrones similares a los obtenidos por el Pre-

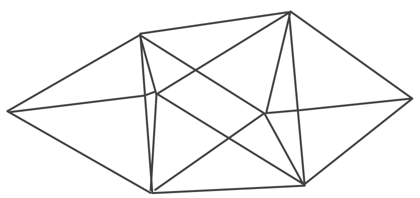


Figura 1. Dos tetraedros y un octaedro que teselan el espacio.

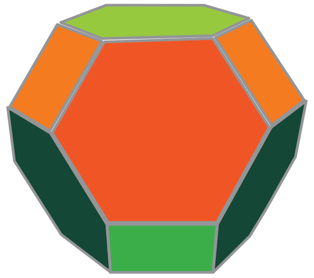


Figura 2. Octaedro Truncado o Tetrakaidecahedra.

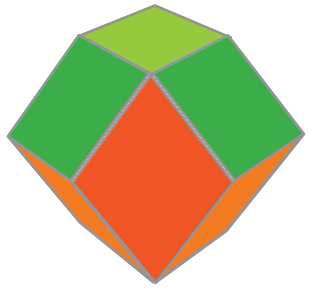


Figura 3. Dodecaedro Rómbico.

mio Nobel Daniel Schechtman (1941-), el descubridor de los cuasicristales (Romero-Meléndez y García de la Parra, 2017).

Un error geométrico de Aristóteles

Hace aproximadamente unos 2,300 años, Aristóteles (384-322 a. C.) afirmó que se podía llenar el espacio con tetraedros regulares, dicha afirmación inició una serie de errores históricos que incluyeron a personajes famosos: Simplicius de Cilicia (490-560) y Averroes (1126-1198) afirmaron que el espacio alrededor de un punto se llena con doce tetraedros regulares y Roger Bacon (1214-1294) escribió que veinte tetraedros regulares llenan el espacio. La corrección del error de Aristóteles se debe a Peter de Auvergne (1240-1304), quien mencionó que la afirmación de Aristóteles era contraria a la percepción y a la razón, y a Regiomontanus (Johannes Müller von Königsberg [1436-1476]) y Paul de Middelburg (1445-1543), quienes afirmaron que no era posible llenar el espacio usando cualquier número de tedraedros regulares. Francesco Maurolico (1494-1575) corrigió el error de Aristóteles al lograr teselar el espacio utilizando un cuerpo geométrico (mostrado en la figura 1) obtenido al unir dos tetraedros regulares con un octaedro regular con lados de la misma longitud. La importancia del reto que planteó Aristóteles a la humanidad en su afirmación la podemos aquilatar en un comentario que escribió David Hilbert (1862-1943), al final del problema 18, en su propuesta de 23 problemas que planteó en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1900, en el que pregunta sobre la manera en que se pueden situar tetraedros regulares en el espacio, para que lo llenen más densamente (Lagarias y Zong, 2012). Otras figuras que llenan el espacio se muestran a continuación (Alsina, 2011).

Teselación de Penrose

Johannes Kepler se interesó en calcular las diferentes formas de llenar el plano con polígonos regulares y concluyó que hay once maneras de lograrlo y son las que se muestran en la figura 4 (Križek, Solc y Solcová, 2012).

Las figuras 4-6 fueron realizadas por la tercera autora y el primer autor (Romero-Meléndez y García de la Parra, 2017).

El físico, matemático y cosmólogo inglés Roger Penrose diseñó un rompecabezas para uno de sus amigos que estaba internado en un hospital, el cual tesela el espacio utilizando rombos regulares y tiene simetría pentagonal local. Los rombos que utilizó Penrose se muestran en la figura 5:

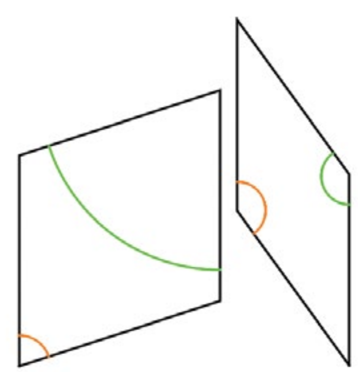
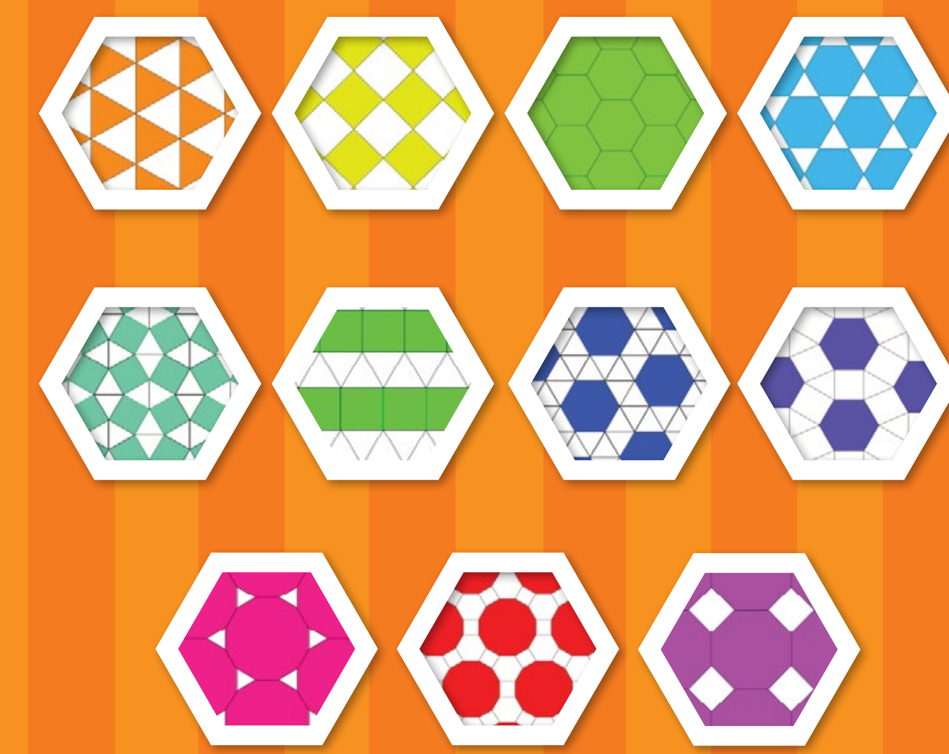


Figura 5. Rombos de Penrose.

Siglo XIX

LA TEORÍA DE LOS GRUPOS FUE IMAGINADA POR PRIMERA VEZ POR LOS MATEMÁTICOS: EVARISTO GALOIS Y NIELS HENRIK ABEL.

FIGURA 4. TESELACIONES DEL PLANO UTILIZANDO POLÍGONOS REGULARES CONVEXOS.



El color de los arcos indica el modo de pegado. La teselación que se obtiene es similar a la mostrada en la figura 6:

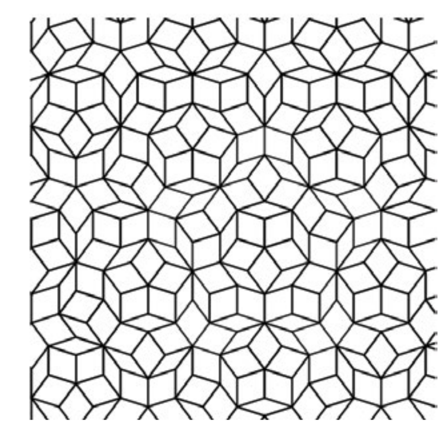


Figura 6. Teselación de Penrose.

Estructura espacial que se proyecta en una teselación de rombos de Penrose

La figura 7 fue realizada por la tercera autora y el primer autor (Romero-Meléndez y García de la Parra, 2017) es la proyección en tres dimensiones de una estructura de dimensión 5. Se proyecta a su vez en una teselación de rombos de Penrose en el plano.

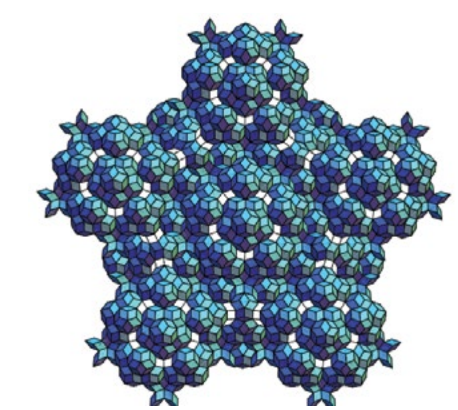


Figura 7. Estructura que se proyecta en una teselación de rombos de Penrose.

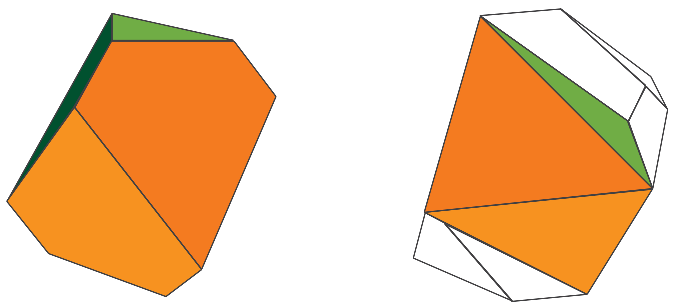


Figura 8. Obtención del octaedro inicial al truncar el sólido de Durero.

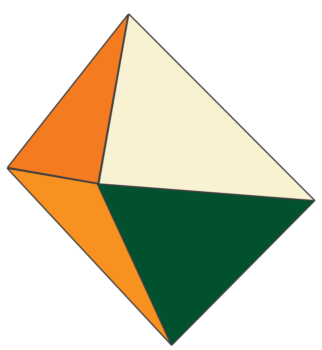


Figura 9. Primer octaedro.

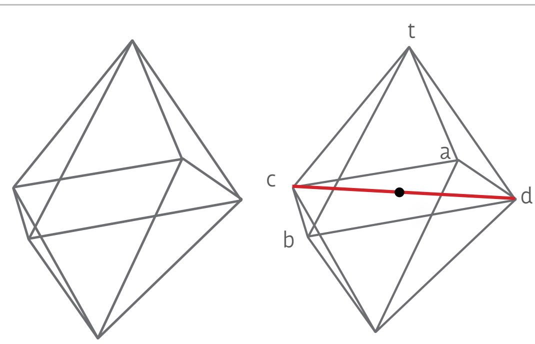


Figura 10. Simetrías del primer octaedro: rotación de 180° con respecto a la línea *cd*.

Teselando el espacio con octaedros irregulares

Lo expuesto anteriormente nos motivó a producir una forma de llenar el espacio con octaedros (irregulares). El octaedro inicial fue producido al truncar un romboedro que aparece en una obra del artista alemán Alberto Durero (ver figura 8).

Alberto Durero fue el primero en pintar motivos de la naturaleza y animales, y es considerado «el Leonardo da Vinci alemán» (Triadó Tur y Serra Perarnau, 2002). En su libro *Instituciones de geometría* describe las primeras tres dimensiones de una manera tan moderna que pudiera leerse actualmente en los textos de matemáticas (Durero, 1979). En su obra titulada *Melancolía I*, presenta un sólido, romboedro truncado, el cual es la base del presente trabajo. La idea original era intentar llenar el espacio utilizando dicha figura, pero como es muy irregular, se decidió hacer una modificación del poliedro de Durero, truncarlo y obtener el octaedro que se muestra en la figura 8.

El primer octaedro obtenido a partir del romboedro truncado tiene seis vértices, cuyas coordenadas en el espacio tridimensional son: a = (1.538, 0.888, 0.961), b = (-1.538, -0.888, -0.961), c = (1.538, -0.888, -0.961), d = (-1.538, 0.888, 0.961), t = (0, -1.776, 0.961), u = (0, 1.776, -0.961). Cuenta con las ocho caras triangulares: {t, a, c}, {u, b, c}, {t, c, b}, {t, a, d}, {a, u, c}, {d, a, u}, {d, u, b}, {d, t, b}, y se muestra en la figura 9.

Las simetrías no triviales encontradas en el primer octaedro se muestran en las figuras 10 y 11.

El método que se utilizó para calcular las simetrías es el siguiente: se buscaron las transformaciones que enviaran al conjunto de vértices: {a, b, c, d, t, u} en el mismo, con la propiedad de que preservaran distancias y caras. Las únicas transformaciones encontradas con esa propiedad fueron: la transformación que envía al conjunto ordenado (a, b, c, d, t, u) en (a, b, c, d, t, u), la transformación que envía (a, b, c, d, t, u) en (d, c, b, a, t, u), y la transformación que envía (a, b, c, d, t, u) en (b, a, c, d, u, t), que corresponden a la simetría trivial, y la rotación y reflexión mencionadas.

Con base en el cuerpo poliédrico inicial, trasladando tres de sus vértices, se obtuvo un segundo cuerpo geométrico que, conjuntamente con el primero, produce columnas tridimensionales. Este segundo octaedro tiene vértices con coordenadas: a = (-1.538, 2.665, 2.884), b = (-1.538, 0.888, 0.961), c = (0, -1.776, 0.961), d = (0, 0, 2.884), t = (-3.077, 0, 2.884), u = (1.538, 0.888, 0.961). Cuenta con las ocho caras triangulares: {t, a, b}, {t, b, c}, {t, c, d}, {t, d, a}, {u, a, d}, {u, b, a}, {u, c, b}, {u, c, d}. Al igual que el primer octaedro tiene como simetrías no triviales, una rotación de 180° y una reflexión (se muestra en la figura 12).

Después se obtuvieron dos cuerpos poliédricos adicionales que ensamblan dichas columnas para llenar el espacio tridimensional. El primero de ellos es el tercer octaedro y tiene vértices cuyas coordenadas son: a = (-1.538, -0.888, -0.961), b = (-3.007, -1.776, 0.961), c = (-3.077, 0, 2.884), d = (-1.538, 0.888, 0.961), t = (0, -1.776, 0.961), u = (-4.616, 0.888, 0.961). Cuenta con las ocho caras triangulares: {t, a, b}, {t, b, c}, {t, c, d}, {t, d, a}, {u, a, b}, {u, b, c}, {u, c, d}, {u, d, a}. Al igual que los dos primeros octaedros tiene como simetrías no triviales, una rotación de 180° y una reflexión (se muestra en la figura 13).

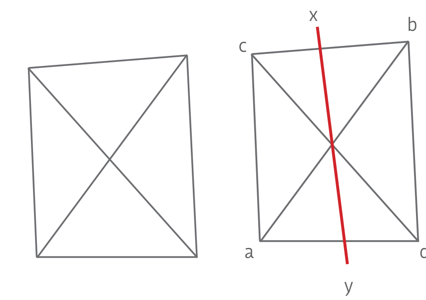


Figura 11. Simetrías del primer octaedro: reflexión con respecto al plano perpendicular a la figura y que pasa por la línea *xy*.

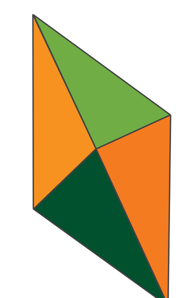


Figura 12. Segundo octaedro.

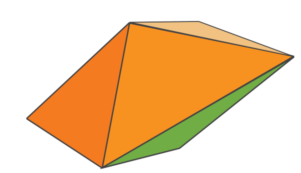


Figura 13. Tercer cuerpo poliédrico.

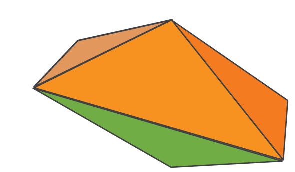


Figura 14. Cuarto cuerpo poliédrico.

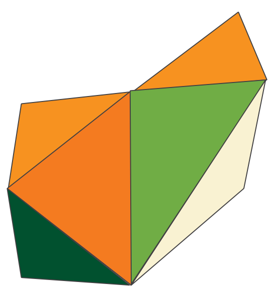


Figura 15. Primer y segundo cuerpos poliédricos.

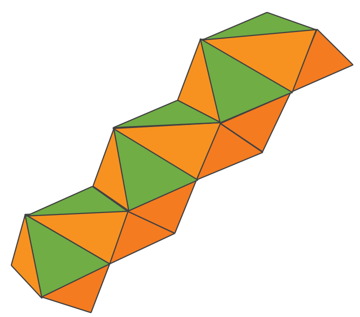


Figura 16. Primera columna tridimensional utilizando el primero y segundo octaedros.

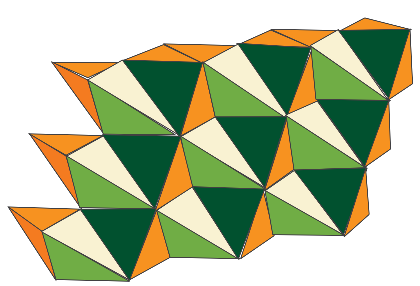


Figura 17. Primera columna tridimensional con desplazamientos.

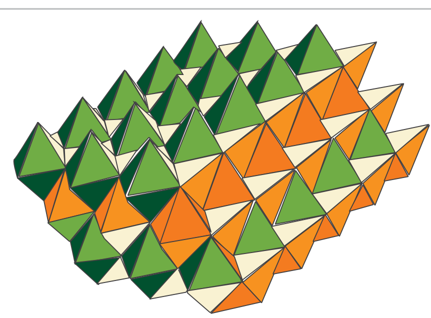


Figura 18. Espacio teselado.

El cuarto octaedro tiene vértices con las coordenadas: a = (0, -1.776, 0.961), b = (-1.538, -2.665, 2.884), c = (-1.538, -0.888, 4.806), d = (0, 0, 2.884), t = (1.538, -2.665, 2.884), u = (-3.077, 0, 2.884). Cuenta con las ocho caras triangulares: {t, a, b}, {t, b, c}, {t, c, d}, {t, d, a}, {u, a, b}, {u, b, c}, {u, c, d}, {u, d, a}. Al igual que los tres prime-ros octaedros tiene como simetrías no triviales, una rotación de 180° y una reflexión (se muestra en la figura 14).

En las figuras 15-18 se muestra el proceso que se llevó a cabo para teselar el espacio utilizando los cuatro octaedros o cuerpos poliédricos.

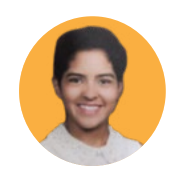
La razón por la cual los cuatro cuerpos geométricos teselan el espacio es la siguiente: el primero y el segundo octaedro forman columnas tridimensionales que se pueden extender, tanto como se quiera, hacia arriba, abajo, adelante y atrás, como se observa en las figuras 17 y 18. Los huecos que quedan son llenados por el tercero y el cuarto octaedro que se muestran en verde y naranja en la figura 18.

CONCLUSIÓN

En el presente trabajo se describió una manera de teselar el espacio, utilizando cuatro octaedros irregulares que provinieron de una modificación del romboedro truncado presentado en la obra titulada *Melancolía I* del artista Alberto Durero. Adicionalmente se calcularon las simetrías de los octaedros utilizados.

Agradecemos a la Ing. María Magdalena Torterolo Noboa por la corrección de estilo de este trabajo.

Guillermo A. Romero Meléndez nació en la Ciudad de México, estudió Matemáticas en el IPN, en el CINVESTAV y en la Universidad de Heidelberg, Alemania. Realizó estancias de investigación en la Universidad de Siena, Italia y en la Universidad de la República del Uruguay. Ha publicado trabajos sobre geometría, complejidad y fractales, y sus aplicaciones a la física, la economía y las artes. Es profesor de la UDLAP desde 1990. ***guillermoa.romero@udlap.mx***



Alejandra Rivera Gutiérrez nació en Tuxpan, Ver. estudió la Licenciatura en Actuaría en la UDLAP. Realizó una colaboración para el artículo titulado «Teselaciones de Penrose y Cuasi-cristales: imaginando una nueva forma de la materia desde el arte y la recreación matemática» (Romero-Meléndez y García de la Parra, 2017). Para la obtención de su grado, escribió la tesina: Teselando *el espacio con Octaedros Irregulares* utilizada en el presente artículo. ***alejandra.riveragz@gmail.com***

María del Pilar García de la Parra Estudió la Licenciatura en Física en la UDLAP y la Maestría en Lógica Pura en la Universidad de Barcelona. Ahora trabaja en ciber seguridad en AgileBites (1Password) en Toronto. ***rpilar.garciada@icloud.com***

REFERENCIAS

- Alsina, C. (2011). *Las mil caras de la belleza geométrica.* España: National Geographic.
- Coxeter, B. (1986). *M. C. Escher, art and science.* Amsterdam: North Holland.
- Durero, A. (1979). *Instituciones de geometría. Traducción del latín al español e introducción de J. Ymhoff Cabrera.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.
- Ernst, H. S. M. (1990). *El espejo mágico de Maurits Cornelis Escher.* Berlin:Taschen.
- Hall, M. (1979). *Teoría de grupos.* México: Trillas.
- Hattstein, M., Delius P. (Eds.) (2004). *Islam arte y arquitectura.* Königswinter: Könemann.
- Hawking, S. (2010). *A hombros de gigantes.* Barcelona: Crítica.
- Križek, M., Solc, J. y Solcová A. (2012). *Is there a crystal lattice possessing five-fold symmetry?. Notices of the AMS, 59(1),* 22-30.
- Lagarias, J. C. y Zong C. (2012). *Misteries in packing regular tetrahedra. Notices of the AMS, 59(11),* 1540-1549.
- Livio, M. (2005). *La Ecuación jamás resuelta.* México: Ariel.
- Montesinos-Amilibia, J. M. (2010). Grupos cristalográficos y topología en Escher. *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Mat.* (Esp), *104(1)*, 22-47.
- Penrose, R. (1999). *The Emperor's new mind.* Great Britain: Oxford University Press.
- Penrose, R. (2008). *El camino a la realidad.* México: Debate.
- Rivera-Gutiérrez, A. (2016). *Teselando el espacio con octaedros irregulares* (tesina de licenciatura no publicada). Universidad de las Américas Puebla.
- Romero-Meléndez, G. y García de la Parra, M. D. P. (2017). Teselaciones de Penrose y cuasi-cristales: imaginando una nueva forma de la materia desde el arte y la recreación matemática. En M. A. Méndez-Rojas, *Arte y ciencia, ciencia y arte* (pp. 88-110). Puebla: UDLAP, CONACYT y Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Puebla.
- Rivera-Gutiérrez, A. (2016). *Teselando el espacio con octaedros irregulares* (tesina de licenciatura no publicada). Universidad de las Américas Puebla.
- Triadó-Tur, J. R. y Serra-Perarnau, A. (2002). *Durero.* Madrid: Susaeta.
- Zahai, L. R. (1998). *Arquitectura imaginaria Al Azrak, el palacio azul.* México: Artes de México, Conaculta.